上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.95-106.

文字式の理解に関する背景的・根源的要素についての研究

古 川　真 哉
上越教育大学大学院修士課程２年

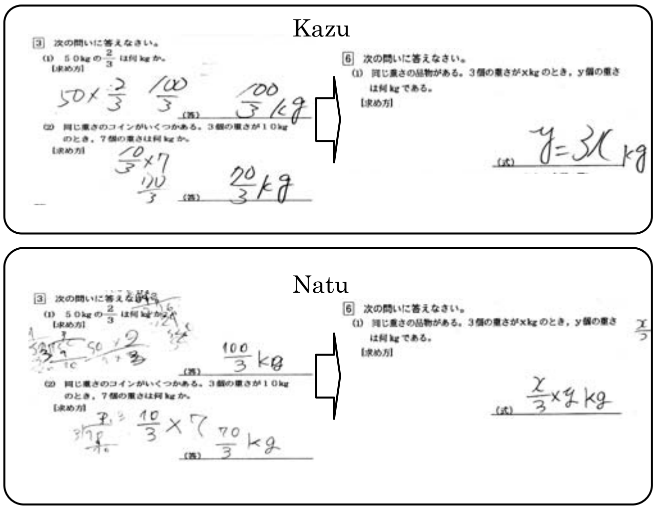
１．はじめに

文字式の学習に困難を示す生徒は少なくない。平成 15 年度教育課程実施状況調査(中学校数学)では，単純に計算する問題は前回調査を有意に上回っているものが多いとする一方で，数や文字式の意味の理解の問題などでは前回調査を有意に下回っているものが多いという見解を述べ，特に中学校数学において数と式の意味理解の定着の必要性を訴えている。

歴史的な知見からも文字式は数学を創造する上で重要な役割を果たしてきた(ｸﾞﾚｲｾﾞﾙ,1997；ｶｼﾞｮﾘ,1997；他)。文字式の有用性とともに実感を伴って理解することや使いこなせるようになることは数学を学習する上で重要である。文字式は数や式からの一般化であり，抽象である。したがって，中学校の文字式の指導においては数や式の理解を背景として文字式が導入されている。しかし，数や式を十分に理解できるようにみえる生徒でも，同じように文字式を理解できるとは限らない。文字式理解には数や式の理解を含め，もっと根源的な要素があるのではないかと考える。本論文ではこのような要素を「文字式理解の背景的・根源的要素」と呼び，それらの解明と，文字式指導を改善するための示唆を得ることを目的とする。

２．文字式の理解について

文字式指導の改善の方向を示唆する研究は数多い(杜,1991；三輪,1996；国宗ら,1997；他)。また，Sfard(1991)の観点から，文字式にも過程と結果の二面性があると捉え，文字式の二面性に関する理解の困難性を指摘する研究も同様である(大塚,2004；清水,1997；板垣,1998；牧野,1996；他)。文字式理解の困難性に対し，解決を図るための様々なアプローチが提案されている(国宗,1999；谷沢 2001 他)。擬変数を用いた数字式に着目したり(藤井,1998)，数から文字への置き換えに数学的抽象化・数学的一般化が重要であることが指摘されている(北川,1987)。これらの見解に基づき，平成 16 年 12 月に新潟県内の公立中学校において中学３年生を対象とし，数から文字への移行過程に関する予備調査を実施した。その結果，Kazu と Natu の２人の理解に特徴的な差が現れた(【図１】)。



【図１】実際の生徒の解答

使用した調査問題は北川ら(1987)の調査問

題に基づき作成したもので，両問は問題構造が同じであるため数を文字で置き換えた形で理解できるように思われた。しかし，そうではなかったのである。問題３については２人とも正しく解答しているが，Natu は分数倍の問題３については実際の計算を施しており，分数を１つの数として扱うというよりも計算手続きのように扱っている。むしろ，Kazu の方が分数倍について正しく理解しているようにも思われる。しかし，問題６では Natu が正答しているのに対し，Kazu は誤答しているのである。この２人の生徒の違いはどこから生じたのであろうか。中学校数学の文字式指導において，数や式から文字への移行は“単なる”数や式から文字への置き換えではすまされない，生徒にとってみれば大きな壁が存在するものと考えることができる。文字式を理解するためには数や式の理解を含めたもっと根源的な要素《背景的・根源的要素》に着目する必要性があると考えるのである。

３．文字式理解の捉え直し

3.1. 数学の二つの側面と文字式の理解

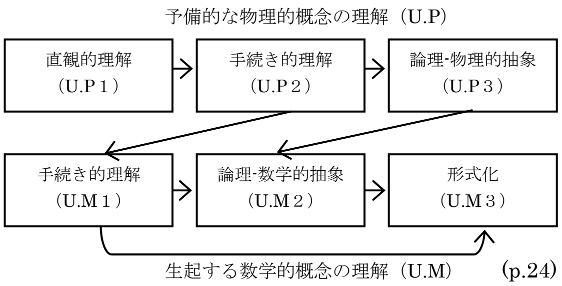
平林（1987）は次のように述べている。

> 数学は二つの側面をもっている。一つは命題の体系としての側面であり，他の一つは表記の体系としての側面である。　(p.386)

ある数学的概念や命題など，理解の対象となる事柄がある。その対象自体を何らかの方法や手段で理解しようと試みる。このことが命題の体系としての数学の側面である。一方で，その対象自体を何らかの方法や手段で表現する必要がある。例えば，偶数という数学的概念を理解の対象としたときに，偶数を表現するのに“2,4,6,…”“○●○●…”“２でわれる数”“２m(mは整数)”など様々な表記で表現可能なのである。実際，数学的概念の実体そのものを目で見えるように示すことはできない。しかし，何らかの形で表現しなければ考察の対象とはなり得ない。このような側面が表記の体系としての数学の側面である。このときに，どの表記を用いるかが問題となる。表記によってはその後の思考を発展させたり逆に制限を与えたりする重要な問題を含むのである。また，平林は数学教育の表記論的研究の目的を，単なる用語の整備や記号の統一にあるだけではない。最終的には数学教育の問題を表記されたもの（言語・記号・図）の問題に還元して論じようとしたものであり，数学的活動を一つの言語活動として捉え，言語・記号として表出された活動を通して，内面的な数学的活動を制御するという算数・数学教育の客観的な指導方法論を樹立することとしている。このような数学の二つの側面から文字式理解を捉え直すことを試みる。文字式は数学を創造するための代表的な表記である。文字式には書く際の約束や使用するときのきまりなど文字式使用上の規約が含まれる。文字式理解はまさに表記の体系としての側面である。一方で，表記としての文字式を理解する際には，文字式によって表現される対象にも目を向ける必要がある。文字式が表しうるものは数量であり，数学的関係や数学的構造である。すなわち，文字式で表現される対象は数学的概念である。文字式で表現する際には，その対象自体を理解しておく必要がある。したがって，文字式理解には命題の体系としての理解の側面もあることになる。最終的には表記としての文字式を理解することが目標であるが，その過程には表現の対象となる命題自体の理解も見逃してはいけないということになる。したがって，文字式理解の背景的・根源的要素にもこの二つの側面があると考えることができる。文字式を理解する際には表記としての理解を先に目指すべきではない。表記の対象となる命題の理解が先にあり，理解した命題をよりよく表現できる手段としての表記，それが文字式であるということを理解する必要があると考えるのである。

3.2. 背景的・根源的要素を捉える枠組み

上記の立場から生徒の実際的な文字式理解を捉える枠組みとして Herscovics ら(1998)の理解の二層モデル(【図２】)に着目する。



【図２】理解の二層モデル

理解の二層モデルについて中原(1995)は，以下のように概括している。

《第１の層》予備的な物理的な概念の理解
（以下，U.P）の構成要素

直観的理解（以下，U.P１）

手近にある観念の全体的知覚に関わる理解。本質的に視覚的知覚に基づく考え方に起因する。およその，数的でない近似が与えられる。

＜例＞乗法場面とそうでない場面との判別。配列が異なっている２つの乗法場面，例えば下の２つの場面の視覚的比較等。

○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○
○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○
○　○　○　○　　　○ ○ ○ ○ ○

手続き的理解（以下，U.P２）

学習者が U.P１と関連づけることができ，また適切に使うことができるような，論理－物理的手続きの獲得に関わる理解。

＜例＞加法的場面の乗法的場面への変換。１対多対応的乗法（同数個ずつ配分）場面と１対１対応的乗法（１つずつの同数回の配分）場面との関連づけ等。

論理 - 物理的抽象（以下，U.P３）

論理 - 物理的不変性の構成，論理 - 物理的変形の可逆性と合成，それらの一般化に関わる理解。

＜例＞多様な乗法的配置における全体の不変性の構成。例えば，１２個のおはじきの２×６，３×４，４×３等々の配置における不変性の構成，おはじきを用いた，乗法の分配法則の理解等。

《第２の層》生起する数学的概念の理解
（以下，U.M）の構成要素

手続き的理解（以下，U.M１）

学習者が，基礎をなす準備的な物理的な概念と関連づけることができ，適切に使うことができ，明白な論理 - 数学的手続きの獲得に関わる理解。

＜例＞数直線や図などを利用して，３飛び，４飛びで全体の個数を求めること。累加の使用等。

論理 - 数学的抽象（以下，U.M２）

論理 - 数学的不変性の構成，論理 - 数学的可逆性と合成，それらの一般化などに関わる理解。

＜例＞具体物に頼ることなく，乗法の結果の一意性やある数の因数への分解，加法に対する乗法の分配法則などの獲得に関わるもの。

形式化（以下，U.M３）

数学的概念をきちんと定義すること。手続き的理解や抽象の結果を数学的な記号で表すこと。公理化や数学的証明を行うこと。

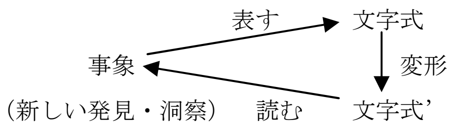
＜例＞４×３, ○×（△＋□）＝○×△＋○×□等。

理解の二層モデルは数学的概念の理解を，物理的概念および数学的概念の二層の理解から捉えることができ，理解の状態やその過程を捉えることができる有効な枠組みである。文字式は数学的概念を数学的な記号で表したものであるので，文字式の理解はこの二層モデルでいう形式化の段階として捉えることができる。すなわち，表記としての文字式理解の側面である。一方で，この二層モデルは形式化に至る過程を具体的に捉えることができる。物理的概念の理解を含めた数学的概念の理解を経て，その結果として形式化に至るという過程が示されている。この過程は，命題としての理解の側面を深める過程として考えることができる。数学的な命題を物理的概念から理解したり，理解した物理的概念を数学的概念として生起させることによって命題としての理解が深化し，最終的にその結果をどう表すかという形式化の段階へと至るものと考えることができる。これにより，文字式理解の背景的・根源的要素を具体的に特定する。文字式理解の背景的・根源的要素とは，数や式の理解を含め，物理的概念をも含めた数学的概念の理解である。そして，文字式は理解した数学的概念を形式的に表現するための表記である。しかし，二層モデルには問題点も

指摘されている(中原,1995)。その中の１つに，形式化の段階には記号的表現や論理的証明など多くのことが盛り込まれすぎている点が挙げられている。実際，文字式で表すことは形式化の中の数学的な記号で表すことを示しているが，文字式理解は文字式で表現することのみの理解ではない。文字式を使うことの理解や文字式を使ってみた結果が何を表しているのかを理解することも必要になってくる。形式化の理解の段階を，文字式で表すことと捉えるだけではなく，より詳細に捉えるための別の枠組みが必要となるのである。

3.3. 文字式利用の図式

理解の二層モデルの形式化には，公理化や数学的証明を行うこと等が含まれる。文字式理解の観点から，形式化をより詳細に捉えるための枠組みとして三輪(1996)の文字式利用の図式(【図３】)に着目する。



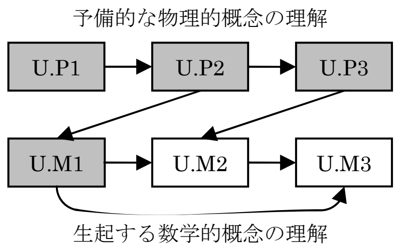
【図３】文字式利用の図式 (p.2)

この図式は，点で示される３つの状態：事象，文字式，文字式’と線で示される３つの過程：表す，変形，読むから成る三角形状のものであり，３つの過程を一廻りすることで，新しい発見や洞察が得られることが期待されている。この図式は文字式を利用した数学的な証明そのものの図式であり，二層モデルでいう形式化としての文字式理解を詳細に捉えることができる枠組みとして考えることができる。また，この図式は文字式の学習過程としても有効である。上述した文字式理解の背景的・根源的要素が文字式の学習過程にどのように取り入れられるかという点に関しても示唆を与えるものである。本論文では，特に「表す」「読む」過程に焦点をあてて文字式理解の背景的・根源的要素を取り入れることとし，背景的・根源的要素が生徒の文字式理解にどのような効果をもたらすのかを分析・考察する。

４．実際の授業の分析と考察

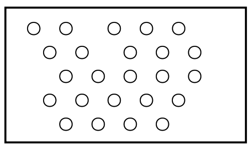
4.1. 学習はじめの理解の状態

2005 年５月の期間に中学校２年生を対象とし，文字式を使った説明の単元にて計６時間の実験授業を実施した。事前調査の結果では偶数を「２でわれる数」奇数を「２でわれない数」と答えた生徒が大半を占めていた。第１時の授業のはじめに理解の二層モデルに基づき偶数や奇数の予備的な物理的概念の理解の状態をマグネットや○印を印したカードなどを用いて確認したところ，【図４】のような理解の状態であることが確認できた。



【図４】学習はじめの理解の状態

ここで注目すべきは U.P３(論理-物理的抽象)の理解が確認できたことである。これはカードＤが偶数であることを○印の個数を数え上げるという操作から判断していたことに対し，１人の生徒 Taka が次のように発言したことに基づく。



カードＤ

1177 Taka ２個ずつのペアがわかれば，１２個いらないじゃん
1179 Taka 別にそこが偶数でも奇数でも，２個ずつのペアがあれば２でわれるということだから，だから別に・・

Taka は，数えることなしでも２個ずつのペアになっていればそれが何組あっても偶数であることが判断できるという。これは偶数が２個ずつのペアから構成されていて，しかも

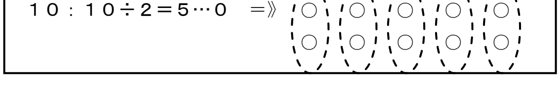
ペアの個数に関わらず偶数であることが理解できているものと捉えることができる。偶数の物理的構造が抽象され，物理的に一般化された偶数が理解されているものであり，U.P３(論理-物理的抽象)の状態であることを示している。

生徒は偶数(奇数も同様)に対する物理的概念をそれぞれ理解している状態であったが，数学的概念としては「２でわる」という操作的手続き的な理解が強い傾向にある。このような状態から生徒たちはどのように U.M２(論理-数学的抽象)を達成し，U.M３(形式化)へと到達していくのか，更に，文字式の理解をどのように深化させることができるのか，その学習過程を次の場面で分析・考察する。

4.2. U.M２，U.M３が達成される場面

偶数は「２でわれる数」であることを確認し，数６が偶数であることを実際に２でわるという手続き的操作から確認した。その後マグネット(〇印)で表現した数６を，２つずつのペアで考えたとき，生徒は「３×２＝６」と表現できることを導いた。この「３×２」と表現された「３」について生徒は，「２つずつのまとまり」「ペアの数」とし，「２」については「まとまっている数」と意味付けた。この後が次の場面である。

4037 T　さて，で，例えば，１０だったら，これ（１０を板書）２でわれるっていうときだったら，１０わる２は５あまり０（板書：１０÷５＝２…０）と考えていましたが，この(マグネットを黒板につけながら) ２つずつのまとまりということを考えれば，・・この（黒板のマグネットを２つずつの〇で囲みながら）２つずつのまとまりということを考えれば，・・・これ今度どうですか？



4038 Ss　・・・
4039 T　今度はどうかな，１３番の Tuba さん。
4040 Tuba　・・・５かける２。(小さい声)
4041 T　（板書：５×２）

4037 T これ今度はどうですか？ に対して生徒ははじめ困惑するが，**4040 Tuba ・・５かける２** と答える。Tuba も他生徒と同様に困惑しており，しばらくの沈黙の後に小さい声で答えたものであった。ここでの教師は，物理的に表現された「２のまとまりが５組あるもの」を指示しながら，２×５という数式表現に結びつけることを意図した発問であったが，生徒にはその意図が伝わらず困惑を起こした。しかし Tuba はその困惑の中で「**・・５かける２**」と答える。通常２×５と表現すべきであるがこのとき生徒は乗数と被乗数との関係を逆にしている。ここで推測されることは，生徒は教師が指示した物理的表現を参照していたわけではなく，例に書かれていた数 10 を参照し「５かける２」と答えたものではないだろうか。したがってこの段階では物理的表現と数式表現との結びつきは不十分なものと考えられる。ここで教師は生徒のいう「５×２」の意味を問う。

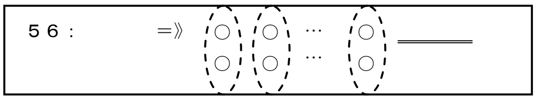
4041 T　（板書：５×２）５かける２，・・この５って何ですか？・・２って何ですか？
4042 T　さっきの，Tom さん，５って何ですか？
4043 Tom　ペアの数。
4044 T　じゃあ，２って何ですか？さっきの Mi さん。
4045 Mi　・・・(後ろの人と相談し,）まとまっている数。
4046 T　（６の例と１０の例を指しながら）何か同じように言えますよね。

教師の問いかけにより，通常２×５を表現している物理的表現（２のまとまりが５組あるもの）を，生徒は「５×２」と表現した式に乗数と被乗数との関係を逆にしたまま「ペアの数」と「まとまっている数」として意味付けていくのである。

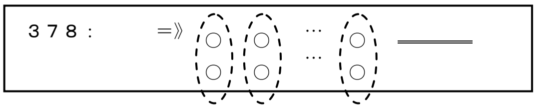
更に次のように続く。

4047 T　んーと，じゃあちょっととびます。５６だったら，５６わる２を計算してもいいんだけれども，２つずつのまとまり（図を描き加えながら）ということを考えたと

きに，どんなように表せますか（マグネットの隣に下線を引く）？・・書いてみてください。

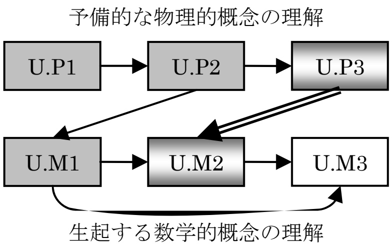


4048 T　ついでに，こんなものもどうかな，（板書：３７８）もう１問追加しました。



（中略）
4050（生徒が黒板に記入：28×２，189×２）

ここで生徒は数と物理的表現と数式表現との結びつきを理解したと捉えることができる。このときの物理的表現は「…印」を用いて表したものであり，生徒は偶数の物理的な一般的表現であることを理解している。すなわち偶数についての U.P３にあたるものである。また，生徒はこの一連の文脈から偶数は(＊)×２のようになっていることを抽象している。数 56 や 378 は偶数だから(＊)×２のようになっているという理解のもとで 28×２と表現しているのである(例えば，数 56 は 14×４や７×８とも表現できるがここでは迷わず 28×２と表現している)。これは偶数の積構造が抽象されており，偶数についての生徒の理解が U.M２の状態にあることを示している。すなわちここで U.P３と U.M２とが結びついたと捉えることができる（【図５】)。

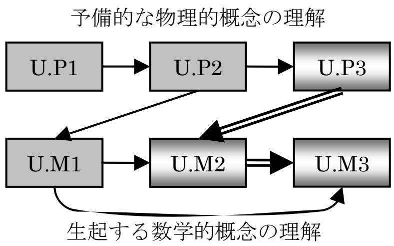


【図５】U.M２の達成

このときに更に注目すべきことが起こる。数 378 について考えていた生徒 Mura はまず□×２と自分のノートに記してから，その後に□に当てはまる数を 378÷２を実行しながら 189×２を求めていた。そのことを教師が取り上げた場面である。

4051 T　確認してください。・・はい，いくつかやってきましたが，２のまとまりということを考えると，こういうふう（５×２，２８×２など）に表してあげることがわかったと思います。で，Mura 君が前にいるからよく見えるんだけど，Mura 君がおもしろいことしていました。これ（３７８）考えるときに，ここ（板書：□×２）で考えてくれたんだよね。
4052 Sat　えー，いいねぇ。
4053 T　あー，いいねっていう声が出ましたね。そうだよね，これ（□×２）いいねって思うんだよね，どういうところがいいと思った？
4054 Sat　え，何か，何かいいです。

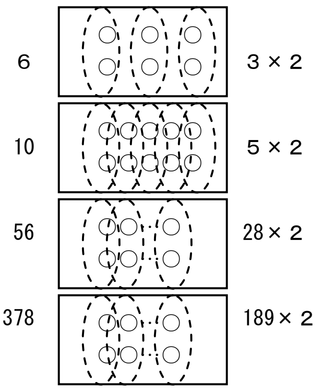
ここでの Mura は一般化のプロセスを経て偶数がいつでも(＊)×２のようになっていることを理解した上で，それを表現するための手段として「□×２」という表現を自らつくり上げていたのである。これは文字こそ用いていないものの記号で一般的な偶数を表現できたことを示している。そしてこの表現を教師が取り上げる(4051T)と，**4052 Sat えー，いいねぇ**と即座に反応する生徒が現れる。Sat は「□×２」のよさを明確に説明することはできなかったが直観的にそのよさを感じることができたのである。偶数を記号で一般的に表現できることのよさに共感した状態である。すなわちここに U.M３(形式化)が達成し(【図６】)，しかも生徒の自然な発展として形式化が起こったことが示されている。



【図６】U.M３の達成と文字式の理解

この後，□には小数や分数を当てはめることができないことを確認し，中学校では□の部分に整数を表す文字ｍなどを用いて，さらに文字式の規約から２ｍ(ｍは整数)と表現できることを理解するのであった。これは生徒

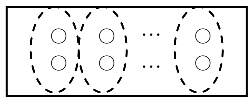
が表記の側面からみた文字式を理解できたと考えることができる。ある数学的概念をよりよく表現する手段として文字式が使われることを，□という記号を介しながら理解できたのである。このときに重要な役割を果たしたものが，U.P３の理解であったと考える。ここでは，３×２，５×２，28×２，189×２と数値を徐々に大きくしながら一般化を図っている。そこに本実践ではU.P３を関連付けている。



【図７】本実践での一般化プロセス

生徒は【図７】のように物理的表現と数式表現とを関連付けながら一般化のプロセスをたどっている。はじめに生徒は３×２を２つずつのまとまりが３組，５×２を２つずつのまとまりが５組というように物理的表現と数式表現とを意味付けていく。乗数と被乗数の関係が逆ではあったが，この文脈から 28×２，189×２を経て偶数が(＊)×２のようになっているとする数学的一般化が起こっていたと考える。このときの生徒は 28×２や 189×２でも２つずつのまとまりが 28 組，189 組と意味付けることは可能であったであろうし，２つずつのまとまりが(＊)組でも偶数であるという理解は達成できていたと考えることができるからである。また，この理解を支えていたものが **1177Taka ２個ずつのペアがわかれば，12 個いらないじゃん**のアイデアである。このアイデアから偶数は「２ずつのペア(組数は関係ない)」と一般的に，かつ実感を伴った言葉で言語化することができ，この言語化された偶数の理解によって物理的表現と数式表現とを結び付けることが可能となった。偶数の理解を(＊)×２として一般的に捉えなおすことができた背景には言語化された偶数の理解や物理的な偶数の理解など U.P３(論理-物理的抽象)が機能していたのである。

更にここで，中原(1995)のいう「翻訳」の問題が生徒に生じたと考える。ここでは【図７】にある物理的表現を生徒は「２ずつのペア」という言語的表現を介しながら，５×２のような数式を用いた記号的表現へと翻訳することができている状態であった。しかし，生徒は【図８】のような偶数(物理的に一般化された偶数)に対して「２ずつのペアが(＊)組の偶数」と理解しながらも，それを表現する手段がない状態，すなわち，物理的表現を記号的表現へと翻訳する手段を有していない状態であったと考えられる。



【図８】偶数

そこに Mura の□×２が紹介される。これは生徒にとって画期的な表現として現れたのではないだろうか。教師から与えられたわけのわからない表現ではなく，生徒が必要に応じて，自然な発展としてつくりだした偶数の一般的な表現であり，ここに「**いいねぇ**」として受け入れられたプロセスがあったと考えるのである。「□×２」を創出し，そのよさが共感された背景にも U.P３が機能していたことが示されている。

4.3. 文字式の構造的な見方が現れ始める場面

次に「読む」過程において文字式理解の背景的・根源的要素がどのような効果をもたらすのかを，文字式の操作的な見方から構造的な見方への移行に焦点をあてて分析し，文字式理解の深化の可能性について考察する。

この場面は偶数が２ｍ，奇数が２ｎ＋１と表現できることを学習した次時にあたる第５時の学習である。生徒は命題としての「偶数と奇数の和は奇数である」ということをマグネット(物理的概念)を利用した説明や実際の数を用いた帰納的な説明から理解している状態である。そこで本時はこの命題を「文字式を使って説明してみよう」と課題設定した。はじめに教師が「偶数と奇数の和」を文字式

２ｍ，２ｎ＋１を用いて次のように表せることを生徒に確認しながら板書した(【図９】)。

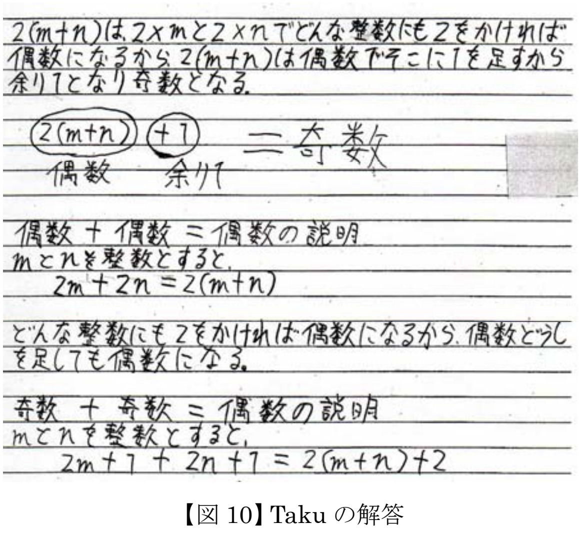
偶数＋奇数＝奇数　の説明 ｍ，ｎを整数とすると， ２ｍ ＋ ２ｎ＋１ ＝ ２(ｍ+ｎ)＋１

【図９】教師の板書

ここで教師が「２(ｍ＋ｎ)＋１とは何を表しているのか」と生徒に問う。すると生徒は「わからない」「これは奇数か？」と反応し，この解釈を行う場面に移る。しばらく個別で考える時間を与えた後，教室の３分の１の生徒は自ら解釈を次のように行うことができた。

5240 Higyu どんな数に２をかけても偶数になるから，それに１をたせば奇数。

これは，整数に２をかけると偶数になり，偶数に１をたすと奇数になる，という計算の過程として解釈しているものであり，Sfard (1991)のいう操作的な見方で文字式を捉えている。自ら解釈を行った生徒のうちの多くはこのような説明を記述している。この後「偶数と偶数の和は偶数である」「奇数と奇数の和は偶数である」ことを文字式を使って説明する問題に移る。このときの生徒の記述である(【図 10】)。



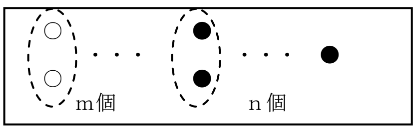
【図 10】Taku の解答

はじめは２(ｍ＋ｎ)に対して２×ｍ，２×ｎとし，２をかけるという操作的な見方で偶数であることを解釈している。この見方が次第に２(ｍ＋ｎ)自体を対象とした見方へと発展し，最後の「奇数＋奇数」では２(ｍ＋ｎ)＋２と変形することで偶数であることを説明している。これは Sfard(1991)のいう凝縮化の段階として捉えることができる。凝縮化は操作を処理しやすい単位に詰め込む段階であり“公式的に”生まれる瞬間である。ここでの２（ｍ＋ｎ）は，それ自体を“公式的に”偶数として扱っているのである。一方で，２(ｍ＋ｎ)＋１や２(ｍ＋ｎ)＋２についてはそれ自体を奇数や偶数と扱うことはできていない。偶数２(ｍ＋ｎ)に１や２をたしているという操作的見方である。すなわち，ここでの生徒は文字式を対象とする見方と操作とする見方の両方が現れている状態(牧野,1996；板垣,1997)である。はじめは操作的見方で扱っていた文字式に対し，解釈を深めながら次に利用する場面ではそれ自体を対象として扱う構造的見方が次第に備わっていくものとして考えることができる。それ自体を対象としてみなければいけないような，より大きなより複雑なものを考えようとしたときに，ある１つのまとまりとしてみる見方が顕在化してくる。このようなスパイラル的な状況を経て構造的見方が養われ，文字式の理解を深化させうる可能性を示している。

ここで注目したい点として，生徒は「奇数と奇数の和は偶数である」ことの説明に対して，２(ｍ＋ｎ)＋２と変形した文字式から偶数であることを解釈している点を挙げたい。通常教科書などでは２(ｍ＋ｎ＋１)と変形した文字式から偶数であることを解釈しているが，ここでは単に形式的な解釈ではなく，自分たちなりの理解を構成した文字式から解釈しているのである。ここでも重要な役割を果たしたものが U.P３(論理-物理的抽象)であったと考える。本実践では従来の文字式指導におい

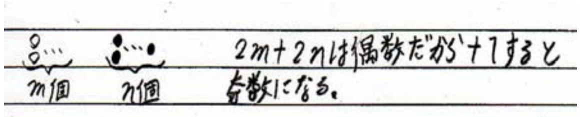
てあまり重視されていなかった物理的概念を含めた数学的概念の理解に焦点をあてている。本時でも「２(m+n)+１」の解釈をはじめる場面では教室の３分の２以上の生徒が解釈できない状態であったため，教師はマグネット(物理的概念)を用いた説明を試みている。

5176 T じゃあ，こんなの（マグネットを取り出して）使ってみたらどうですか？あの，見えている人はいいんですよ，例えば，２ｍ，この２っていうのがなんだっけ？
5177 S 偶数。
5178 Tomi ペアの数。
（途中略）
5186 T ここ（２ｍを指して）に書いてあるのは？
5187 S ｍ。
5188 T じゃあ，何個あるんですか？
5189 Higu ｍ個。
5190 T そうだなー，無限っていうのもいいんだけど，・・
5191 S ｍ個。
5192 S ｍペア。
5193 T （板書：ｍ個）じゃあ，こっち（２ｎ＋１），ｎだったらどうしようかな，（黒色のマグネットを取り出して）これ，色違うのって，・・いい？これ，なんで色変えると思う？
5194 Higu 違う数だから。
5195 T 何と何が？
5196 Ss ｍとｎが。
5197 T うん，（首を縦に振る）はい，じゃあこういうの(ﾏｸﾞﾈｯﾄ)が何個あるんですか？
5198 S いっぱい。
5199 Ss ｎ個。
T ｎと・・・
S プラス１。
5200 T （板書：ｎ個）それとプラス１。で，これをたすということはどういうことだろう？それをたしたら，奇数といえるのか？



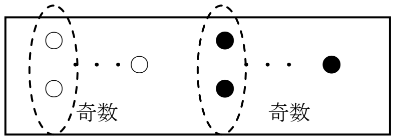
5201 Higu いえる（上がり口調で）。
5202 T うん，じゃあその理由を考えてみてください。

その結果，解釈できない状態であった１人の生徒 Higu がかなり自信をもった口調で反応する(プロトコル No.5201)。この後 Higu は次のように記述することができたのである(【図 11】)。



【図 11】Higu の解答

この記述にはまだ不十分な点が残るものの，教師が用いたマグネット(物理的概念)からここまで解釈できるようになったという変化に注目する。また，先に述べた２(ｍ＋ｎ)＋２と変形した文字式から偶数であることを解釈した背景にもこのマグネット(物理的概念)が機能していたものと考える。生徒の理解に【図12】のようなものがあったとすれば，余った○と余った●を合わせて，＋２とするのはごく自然であろう。それが文字式を使ったときには，２ｍ＋１＋２ｎ＋１から，２ｍと２ｎもしくは２(ｍ＋ｎ)は偶数とし，余った１と１をたせば２であるから，偶数に２をたしても偶数である，というように自分の解釈し易い形に変形した結果が２(ｍ＋ｎ)＋２である。このように，自分たちなりの解釈を可能にした背景にはマグネット(物理的概念)があり，特に U.P３(論理-物理的抽象)が重要な役割を果たしていることを示している。



【図 12】奇数と奇数の和

4.4. 命題の理解と表記の理解が整合しない場面

ここでは，命題の体系の理解と表記の体系の理解とが一致しない場面を取り上げ，そこで生徒がみせた混乱から新たな課題を見出す

ことを試みる。

この場面は，前時(第４時)に文字式を使って偶数が２ｍ，奇数が２ｎ＋１と表現できることを学習した次時(第５時)にあたる。教師は学習のはじめに「ｍを整数とすると，偶数はどのように表すことができるか」と生徒に確認する。すると生徒は，教師が板書した「偶数：２でわれる数」に反応し，偶数はm/２のようになると答える。m/２が偶数を表しているのかどうかを確かめるために教師は，ｍに実際の数値を代入して考えさせようとする。生徒に代入する数値を聞くと４，６，14，２億，５，30 が挙がったが，この中の５という数値に注目が集まる。

5029 T もうここ（５）に注目してくれた，これ（５）ってさ，ここ（m/２）に入れるとダメ？
5030 Mura そうそう，奇数なんで・・
5031 Sat 偶数でないとダメ。
5032 T えっ，何が奇数なの？
5033 Sat 大丈夫ですか，Mura さん。
5034 T まあ，ここ（m/２）に入れてみると，みんなはこれ（板書：５/２）をもう考えてくれたのかな，これ（４/２）がマルで，こっち（５/２）がダメで，で，何がダメなの？
5035 S 整数・・
5036 Maru 整数だとならない。
5037 T 整数か？
5038 S 整数にならない。（５/２が）
5039 T 整数にならない，・・整数にならない，うん，何をすると整数にならない？
5040 S ２でわる。
5041 T うん，２でわると，
5042 S プラス１。
5043 T あー，・・
5044 S 余りがでる。

ｍに代入する数値として５はふさわしくないと考えている。これは「偶数は２でわれる数」という考えから導いた「m/２」が偶数を表しているから，５や 13 などはｍに代入する数値としてはふさわしくないというものである。そこで教師は改めて生徒に問う。

5055 T ｍって何だ？
5056 Higu 整数。
5057 T じゃあ，ｍ，１３ダメ？
5058 Higu いい。
5059 Sat え？どういうことだよ？
5060 Higu だって，整数じゃん。
5061 Sat は？奇数だし。
5062 S 整数とするって・・
5063 S 偶数だよ。
5064 Kou 偶数じゃないといけないんだよ。

「ｍを整数とすると」の記述に着目しはじめる生徒が現れるが，教室内では「偶数は２でわりきれる数だからm/２」という考えが強く，「ｍを偶数とする」と修正しなければいけないと考え，生徒は次のように結論づける。

5086 T じゃあ，もと（ｍが整数だということ）を変えるの？
5087 S 整数・・
5088 S 偶数の整数・・
5089 S そうそう，整数の偶数・・
5090 Taka 偶数は整数だから，整数いらないんだよ。
5091 Higu そうそれなんだよ。
5092 Ss 偶数でいいんだよ。
5093 S 偶数がいいんだよ。

ここで生徒が下した結論は「ｍを偶数とすると，m/２は２でわりきれる(整数になる)」というものであった。

この場面は命題の体系の理解と表記の体系の理解とが整合していない場面であり，文字式理解の背景的・根源的要素が十分に機能されていない場面として捉えることができる。生徒は「その数が２でわれるならば，その数は偶数である」という命題をもっている。生徒が下した結論の背景にはこのような命題の理解があり，手続き的な概念をそのまま文字に表現しようとしたものが「m/２」である。これは Skemp(1979)のいう論理的理解が欠如

している状態である。自分の思いを表現することと，表現されたものが自分の表現したかったことをきちんと表現できているかどうかは別の問題であることを示している。この場面における指導上の問題点は，正しいということがどのようにして決まるのかという基準が不明確な点であった。mに数値を代入したときにどんな数でも偶数を表現できるものになっているか，偶数のすべての要素が現れる表現になっているか，という基準が必要であった。生徒は前時の学習では，物理的概念を含めた数学的概念の理解から偶数が(＊)×２のようになっていることを理解し，この理解を背景にもつことで偶数が２ｍと表現できることを理解した。文字式理解の背景的・根源的要素が機能した状態である。しかし，この文脈から離れ偶数は「２でわれる数」という手続き的な概念で考えたときには「m/２」と表した方がよいという考えが露呈する。既習の知識の一部に依存し，そこから表現に結び付けようとしたものである。単に表すだけではなく，その表したものが自分の表したいことを表現できているかどうか，逆の考えが必要であるということをこの場面は示唆しているのである。この逆の考えとは“チェックする能力”である。あることを表現したら，それがはたして自分が表現したいと思ったことを正確に表現できているかを確かめる能力である。チェックした結果，不十分な表現であれば修正できる能力でもある。このような能力を高める指導は極めて重要なものと考える。新たな表現を創り出すときに必要になり，単に記憶の量が問われる知識とは明らかに質が違うものである。この能力はメタ認知に関わっている。岩合(1992)は，自己の行動を修正できる能力をメタ認知能力とし，学習の質を高めるのに役立つであろうという見解を示している。ここでは，自分が表現したものが必ずしも自分が表現したかったことを表現できていない場合があることを知っていて，今度はそうしないように考えること，つまり自分の誤りやすい認知的な傾向に関する知識が必要である。重松(1992)は，メタ認知が子どもに内面化し「内なる教師」として機能するものとして期待している。“チェックする能力”が生徒の「内なる教師」の１つの要素として機能することは表現や文字式の学習のみならず，学習全般に関わる重要性を含むことになるであろう。このような“チェックする能力”を高めるための指導法の開発は今後の更なる課題として考えていきたいものである。

５．おわりに

本論文では，命題と表記の二つの側面(平林,1987)から文字式理解を捉え直し，二層モデル(Herscovics ら,1988)に基づいて文字式理解の背景的・根源的要素になり得るものを，特に偶数の理解過程を例として，認識論的に導き出した。それは，数や式の理解を含め物理的概念をも含めた数学的概念の理解であった。このように導き出した背景的・根源的要素が実際の授業過程における生徒の文字式理解にどのような効果をもたらすのかを明らかにするために計画・実施した実験授業を対象とし，特に，三輪(1996)の文字式利用の図式のうちの「表す」「読む」過程に焦点をあてて分析・考察した。

その結果，「表す」過程では生徒は偶数を自ら記号を用いて一般的に表現することができ，その表現のよさを「いいねぇ」として即座に受け入れることができた。そこには物理的概念(特にU.P３)と数学的概念(特にU.M２)との結びつきを重視した一般化のプロセスがあり，言語化された偶数の理解がそれらを結びつける基盤になっていた。これは生徒が物理的表現や数式表現から言語的表現を介しながら一般的な記号的表現へと翻訳することができたことを示しており，論理-物理的抽象(U.P３)が中間的表現や数式表現から一般的な記号的表現への翻訳の仲介的役割を果たしたと考えることができる。

また，文字式を「読む」過程では，はじめは操作的な見方で扱っていた文字式に対し，その解釈を深めながら，次に利用する際にはその文字式自体を対象として扱うような構造的な見方が次第に備わっていく，というように生徒は文字式理解を深化させていた。このような背景にも論理-物理的抽象(U.P３)が機能しているということを明らかにした。

一方，生徒は偶数を「２でわれるもの」という概念で考えると，偶数をm/２と表してしまうという傾向がみられた。これは命題の体系と表記の体系とが整合しない場合に顕れる傾向である。単に表すだけでなく，その表したものが自分の表したいことをきちんと表現できているかどうかを“チェックする能力”が必要であるということを示唆しているのである。

本論文の主要な結論は次の３点である。

①論理−物理的抽象は文字式理解において有効な背景的・根源的要素を構成する，ということ

②その指導にあたっては，文字式はそれ自体が数学的概念というわけではなく，数学的概念をよりよく表現するための表記（道具）にすぎないということを明確に意識する，ということ

③そして，表現の対象となる−命題の体系としての−数学的概念の理解を，表現の手段である表記の理解と相互に発達させながら指導するということが重要である，ということ

本論文では文字式理解の背景的・根源的要素について，特に論理-物理的抽象の役割に焦点をあてて論じてきた。今後，更に論理-物理的抽象の可能性について実証的に検証するとともに，背景的・根源的要素となり得る他の理解を明らかにすることが課題である。また，文字式の適切な使用においては“チェックする能力”が重要であり，この指導法の開発も今後の課題としたい。

引用・参考文献

Anna Sfard.(1991).On the Dual Nature of Mathematical Conceptions：Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *ESIM, 22(1)*, 1-36

藤井斉亮.(1998).「文字式の理解」に関する一考察－擬変数について. 日本数学教育学会, 第 31 回数学教育論文発表会論文集，123-128.

藤井斉亮.(2000).「式に表す」ことの困難性について. 日本数学教育学会，第 33 回数学教育論文発表会論文集，349-354.

グレイゼル.(1997).グレイセルの数学史Ｉ, 訳 保坂秀正 山崎昇，大竹出版.

平林一榮.(1987).数学教育の活動主義的展開. 東洋館出版社

板垣政樹.（1998）.中学生の文字を用いた説明についての研究－文字式の二面性の理解を視点として－，上越数学教育研究，13，43-52.

岩合一男.(1992).数学教育の研究と実践.岩合一男先生退官記念出版会，数学教育学の新展開(pp.2-37). 聖文社.

カジョリ.(1997).復刻版カジョリ初等数学史，訳 小倉金之助，共立出版.

北川如矢他.(1987).分数・文字式を教えるということ. 大阪数学教育研究会. 明治図書

国宗進他.(1997).確かな理解をめざした文字式の学習指導.新しい授業づくり５. 明治図書

牧野眞裕.(1996).文字式に関する認知的ギャップについての一考察. 日本数学教育学会，第 29 回数学教育論文発表会論文集，37-42.

三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究，15，1-14.

N. Herscovics & J.Bergeron.(1983).Models of Understanding. *ZDM, Jahrgang 15 , Heft 2, April* .75-83

中原忠男.(1995).算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 聖文社

大塚高央.(2004).文字式のよさの指導に関する基礎的研究，上越教育大学修士論文.

R.R.Skemp.(1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *MT, 77*, 152-163

R.R.Skemp.(1979). Goals of Learning and Qualities of Understanding, *MT,88*, 44-49

R.R.Skemp.(1982). Symbolic Understanding, *MT, 99*, 59-61.

重松敬一.(1992).メタ認知の発達的変容.岩合一男先生退官記念出版会，数学教育学の新展開(pp.144-159). 聖文社

杜威.(1991).学校数学における文字式の学習に関する研究. 東洋館出版社.

谷沢浩明.(2001).文字式の学習過程に関する研究 - 事象と文字式の関連に焦点を当てて - .上越数学教育研究，16，69-80.